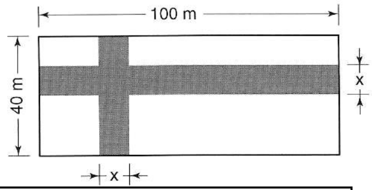
UAA5 Séquence 6 : Les polynômes

1) Activité

Le dessin ci-dessous représente un parc traversé par deux allées de largeur x (en mètres). Exprime l'aire totale des pelouses sous forme d'une somme; l'expression sera la plus simple possible.



Aire des pelouses = ……………………………………………………………………

= ……………………………………………………………………

2) Vocabulaire

a) **Monômes :**

- Définition

Un monôme ………

- Vocabulaire :

……………………………………………

$2 \cdot x^3$

…………………………………………………… ……………………………………………………………

- Exemples : ………………………………………………………………………………

b) **Monômes semblables :**

Des monômes semblables sont des monômes qui ont la même partie littérale.

Exemples : $-2x^3$ et $3x^3$ sont des monômes semblables

$-6\,a^2\,b\,x^3$, $3\,a^2\,b\,x^3$, $-12\,a^2\,b\,x^3$ sont des monômes semblables

ATTENTION : $6\,a^3\,b$ et $3\,a\,b^3$ ne sont pas des monômes semblables.

Remarque :
Des monômes opposés sont des monômes semblables dont les coefficients sont opposés ; leur somme est nulle. (Exemple : $-4x^2$ et $4x^2$)

c) **Polynômes :**

- Définition :

Un polynôme est ………

$A(x) = x^3 - 2$ est un **binôme.**

$C(a) = a^3 + a^2 - a - 1$ est un **quadrinôme.**

$B(y) = y^2 + 2y + 1$ est un **trinôme.**

- Notation d'un polynôme :

Le polynôme $x^3 - 5x^2 - 2x + 3$ est un polynôme en x.

On le note : **$P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 4$**

- ✓ Les coefficients de ce polynôme sont ....
- ✓ La variable de ce polynôme est : ....
- ✓ Le terme indépendant de ce polynôme est : ....

- Polynôme réduit et ordonné :

Réduire un polynôme consiste à additionner ou soustraire les monômes semblables.

Ordonner un polynôme par rapport à une variable consiste à classer les monômes dans l'ordre croissant (ou décroissant) des puissances de la variable.

Exemple : Réduit et ordonne suivant les puissances décroissantes de x :

$P(x) = 4x^3 + x^5 - 6x^3 + 4x - 3 - 7x^5 - 8 - x - x^5 =$ ....

- Degré d'un polynôme :

Le degré d'un polynôme est l'exposant le plus élevé de cette variable.

Exemples :

$P(x) = 3x - 5x^3 + 4x^2 - 1 \longrightarrow$ degré = ...

$P(x) = 5x^3 - 4x^2 + 5x - 3x^3 + 1 - 2x^3 \longrightarrow$ degré = ...

- Polynôme complet :

Un polynôme réduit est complet par rapport à une variable s'il contient toutes les puissances de cette variable à partir de la plus élevée.

Exemples :

$2x^3 - 3x^2 - 5x + 4$ est un polynôme complet en x.

$2x^3 - 5x + 1$ est un polynôme incomplet en x.

Remarque :

On peut écrire $2x^3 - 5x + 1 =$ .... et ainsi rendre le polynôme complet.

- Valeur numérique d'un polynôme :

La valeur numérique d'un polynôme se calcule en remplaçant la variable par une valeur donnée.

Exemple :

Soit $P(x) = -3x^3 + 5x^2 - 6$, calcule sa valeur numérique pour $P(-1)$

$P(-1) =$ ....

3) Somme de polynômes

Détermine la **somme** **S(x)** des polynômes A(x) et B(x).

$A(x) = 6x - 8x^2 + 4 - 2x^4$

$B(x) = 9x - 10x^2 + 5x^3 + 8$

$S(x) = A(x) + B(x)$ = ...

= ....

= ....

4) Différence de deux polynômes

Détermine la **différence** **D(x)** des polynômes A(x) et B(x).

$A(x) = -x + 1 + 4x^2$

$B(x) = -5 - 3x^3 + 7x$

$D(x) = A(x) - B(x)$ = ...

= ....

= ....

5) Produit de polynômes.

- Multiplication d'un polynôme par un monôme

Détermine le **produit** **P(x)** du polynôme A(x) par le monôme B(x).

$A(x) = x + 2x^3 - 4x^2$ et $B(x) = 2x^2$

$P(x) = A(x) . B(x)$

= ....

= ....

- Multiplication d'un polynôme par un polynôme

Détermine le **produit** **P(x)** du polynôme A(x) par le polynôme B(x).

$A(x) = 2x^2 + 3x^3 - x + 5$ et $B(x) = 3x - 2x^2 - 1$

$P(x) = A(x) . B(x)$ = ...

= ....

= ....

Comment pourrait-on prévoir le degré du produit sans effectuer l'opération ?

$\boxed{\text{si } A(x) \,.\, B(x) = Q(x) \text{ alors degré } AQ(x) = \text{degré } A(x) \ldots \text{ degré } B(x)}$

6) Produits particuliers : Les produits remarquables

- Carré d'une somme et d'une différence :

Formules :

$(a + b)^2 =$ ………………………………	$(a - b)^2 =$ ……………………………………

Exemples :

$(a + 3)^2 =$ ……

$(4x^2 + 2y^3)^2 =$ ………

$(-2a - 3b)^2 =$ ……

- Produit de binômes conjugués :

Formule : $(a + b) . (a - b) =$ …………………………

Exemples :

$(a + 2)\ (a - 2) =$ ………

$\left(\frac{2a}{3} - \frac{b}{2}\right) . \left(\frac{2a}{3} + \frac{b}{2}\right) =$ ………………………………………………………………………………………

$(-3a - 4b)\ (-3a + 4b) =$ …………………………………………………………………………………………………

ATTENTION :

$(3x^2 - 4y)\ (3x^2 - 4y) =$ ………………………………………………………………………………………………

Remarque :

$(a - b) . (b + a) =$ ………

$(- a + b) . (a + b) =$ ………………………………………………………………………………………………………

$(- a - b) . (a + b) =$ ………………………………………………………………………………………………………

7) Quotient d'un polynôme par un monôme

Par analogie avec la division euclidienne de nombres naturels, diviser le polynôme P(x) par le polynôme D(x), c'est chercher le quotient Q(x) et le reste R(x) tels que :

$P(x) = D(x) \,.\, Q(x) + R(x)$ avec degré de $R(x) <$ degré de $D(x)$

Pour la disposition pratique, il faut d'abord ordonner et compléter chaque polynôme.

Détermine le quotient Q(x) du polynôme A(x) par le monôme D(x).

$A(x) = -9x^3 + 6x^2 - 15x + 12$

$D(x) = -3x$

Disposition pratique :

$$\begin{array}{l|l} -9x^3 + 6x^2 - 15x + 12 & -3x \\ \hline & \end{array}$$

$Q(x) = A(X) : D(X) =$ ....

$R(x) =$ ....

$\Rightarrow -9x^3 + 6x^2 - 15x + 12 =$ ....

8) Quotient d'un polynôme par un polynôme

Détermine le quotient Q(x) du polynôme A(x) par le polynôme D(x).

$A(x) = 6x^5 - 3x^4 - x^3 - x^2 + 3x + 7$

$D(x) = 3x^2 + 4$

Disposition pratique :

$$\begin{array}{l|l} 6x^5 - 3x^4 - x^3 - x^2 + 3x + 7 & 3x^2 + 4 \\ \hline & \end{array}$$

$Q(x) = A(X) : D(X) =$ ....

$R(x) =$ ....

$\Rightarrow 6x^5 - 3x^4 - x^3 - x^2 + 3x + 7 =$ ....

Comment pourrait-on prévoir le degré du quotient sans effectuer l'opération ?

si $A(x) = D(x).Q(x) + R(x)$ alors <u>degré</u> $Q(x)$ = <u>degré</u> $A(x)$ .... <u>degré</u> $D(x)$

9) *Quotient d'un polynôme par un binôme de la forme « x – a »*

LA MÉTHODE DE HORNER

Si on divise un polynôme par (x – a), en appliquant la propriété de la division euclidienne, on a

A(x) = (x – a) . Q(x) + r où r est une constante.

$A(x) = 3x^3 - 8x^2 + 9x - 4$

$D(x) = x - 2$

<u>Disposition pratique :</u>

$3x^3 - 8x^2 + 9x - 4$ | $x - 2$

Q(x) = ...

R(x) = ...

$\Rightarrow 3x^3 - 8x^2 + 9x - 4 =$ ....

Pour ce type particulier de division, on utilise aussi la méthode d'**HORNER**

Cette règle est une disposition simplifiée de la **division d'un polynôme par x – a**.

<u>Grille de Horner :</u>

coefficients de A(x) | terme indépendant

coefficients de Q(x) | reste

Q(x) = ... R(x) = ...

$\Rightarrow 3x^3 - 8x^2 + 9x - 4 =$ ....

<u>Remarques :</u>

- Pour utiliser la grille d'Horner, il faut **réduire et ordonner le dividende** par rapport aux puissances décroissantes de la variable, **compléter** éventuellement le dividende en attribuant aux termes manquants le coefficient 0.
- La grille d'Horner ne peut s'utiliser que lorsque **le diviseur est du type x - a** (binôme du 1er degré)
- Le degré du quotient est toujours le degré du dividende diminué de 1
- Le reste est toujours un terme indépendant (car de degré 0)

La méthode de Horner est encore utilisée au quotidien par les mathématiciens du secteur de l'informatique. Elle permet de raccourcir considérablement certaines séries de 0 et de 1 (nombres binaires) dans le langage de programmation d'un ordinateur. Cette réduction permet à l'ordinateur de fonctionner plus rapidement.
Par ailleurs, les spécialistes en cryptographie appliquent la méthode de Horner lorsqu'ils cherchent à renforcer la protection des données en ligne, par exemple dans le cadre de systèmes de paiement.

- Propriété de la division d'un polynôme par $(x - a)$: La **loi du reste.**

➢ Reprenons la division de la page précédente :

$(3x^3 - 8x^2 + 9x - 4) : (x - 2)$

Le quotient $Q(x)$ est $3x^2 - 2x + 5$ et le reste $R(x)$ est 6

Le polynôme « dividende » peut donc s'écrire : $P(x) = (x - 2) . (3x^2 - 2x + 5) + 6$

Calculons sa valeur numérique pour $x = 2$ (2 est la valeur de x qui annule le diviseur) :

……

……

On obtient $P(2)$ = ………………………………

➢ Autrement dit, la valeur numérique du polynôme « dividende » si $x = 2$ est égale au ………………… de la division de ce polynôme par $(x - 2)$.

LA LOI DU RESTE :

Le reste de la division d'un polynôme $A(x)$ par $(x - a)$ est la valeur numérique de ce polynôme en a.

Donc, pour calculer le reste d'une division d'un polynôme par $(x - a)$ sans effectuer la division, on calcule la valeur numérique du polynôme pour $x = a$.

Exemple :

Sans effectuer la division, calcule le reste de la division $(x^3 - x^2 - 5) : (x + 3)$

……

……

Remarque :

Si le reste est nul, c'est-à-dire si $P(a) = 0$, on dit que la division est exacte

10) Exercices

1 RAPPEL : **EFFECTUE** les opérations et **RÉDUIS** si possible.

a) $2b - 7b + 3b =$ ……………………………………………………………………………………………

b) $4y^2 - y^3 + 2y^2 =$ ……………………………………………………………………………………

c) $5x - (4 - 3x) =$ ………………………………………………………………………………………

d) $8m \cdot 2m^2 =$ ……………………………………………………………………………………………

e) $(-t + 5) \cdot (-2) =$ ………………………………………………………………………………………

f) $(a - 4) \cdot (2a + 3) =$ ……………………………………………………………………………………

g) $-3z \cdot (-2x) \cdot (-5xy) =$ …………………………………………………………………………

2 **Complète le tableau :**

Monôme	Coefficient	Partie littérale	Degré en x
$-3x^5$			
$14x$			
35			

3 **Réduis et ordonne les polynômes ci-dessous. Donne ensuite leur degré et dis s'ils sont complets.**

$P(x) = 3x^2 - 4x^3 + 3 + 4x - 6 + 2x^2$	$R(x) = 3x - 5x^2 - 4x + x^3 - 8 - 5x^2$
$Q(x) = x^3 - 5x^2 - 4x - x^3 + 8 + 4x + 5x^2$	$S(x) = 4y^3 - 3y + y^3 - y^2$

4 **Ecris :**

- Un polynôme du 3$^{\text{ème}}$ degré en x, réduit et ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x.
  ……………………………………………………………………………………………
- Un polynôme du 4$^{\text{ème}}$ degré en y, réduit, ordonné et incomplet par rapport aux puissances croissantes de y : ……………………………………………………………………
- Un polynôme en x, réduit, complet et ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x et dont les coefficients sont dans l'ordre : 5 ; –2 ; 4 ; 1 et 4. ……………………………………………………………………

5 **Si** $P(x) = 4x^2 - 2x + 3$ et $R(x) = 7x^3 - 2x + 4x^5 - 4$, **calcule la valeur numérique demandée :**

$P(0) =$	$R(0) =$
$P(2) =$	$R(1) =$
$P(-1) =$	$R(-2) =$
$P\left(\frac{1}{2}\right) =$	$R\left(\frac{1}{2}\right) =$

6 **Soient les polynômes :** $A(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3$; $B(x) = 6x - x^2$; $C(x) = 4 + 2x^3$

1) Calcule les polynômes suivants (sur feuille quadrillée) :

a) $S(x) = A(x) + B(x) + C(x)$

b) $D(x) = A(x) - B(x) + C(x)$

c) $Q(x) = A(x) - B(x)$

d) $R(x) = -A(x) + B(x) - C(x)$

2) Complète ensuite le tableau suivant.

d° A(x)	= 5	= 2	= 5	= a	= a
d° B(x)	= 3	= 3	= 5	= a + 2	= b
d° $(A(x) + B(x))$					

7 **Soient les polynômes :** $A(x) = -2x^2$ $B(x) = 2x + 3$ $E(x) = 4x - x^2$

$C(x) = 4x^3 - 2x$ $D(x) = -2 + 3x^2 - 2x$

1) Calcule les polynômes suivants (sur feuille quadrillée) :

a) $P(x) = A(x) . B(x)$

b) $Q(x) = - C(x) . E(x)$

c) $R(x) = 2C(x) . D(x)$

d) $T(x) = A(x) . B(x) . E(x)$

2) Complète, ensuite, le tableau suivant.

d° A (x)	= 2	= 4	= 5	= a	= a
d° B (x)	= 5	= 2	= 5	= a	= b
d° $(A(x) . B(x))$					

8 **Etonnant programme de calcul :**

- Choisis un nombre entier.
- Multiplie l'entier qui est juste avant par l'entier qui est juste après.
- Elève au carré le nombre de départ.
- Retranche à ce carré le produit précédent.

Donne le résultat :	Essaye avec un autre nombre :	Que remarques-tu ? Justifie-le **algébriquement**

9 **Applique les formules des produits remarquables :**

Série 1	**Série 2**
a) $(a - 6) . (a + 6) =$	a) $(3a + \sqrt{2})^2 =$
b) $(3a - \sqrt{5})^2 =$	b) $\left(3x^3 + \frac{1}{4}\right) . \left(3x^3 - \frac{1}{4}\right) =$
c) $(3a^2b - 5ab^2) . (3a^2b + 5ab^2) =$	c) $(-4a + \sqrt{3}) . (4a + \sqrt{3}) =$
d) $(-\sqrt{5} + 2a) . (-\sqrt{5} - 2a) =$	d) $(-2a - b)^2 =$
e) $(5a^3b^2 + 2a^2b)^2 =$	e) $(-3x^2 - 5) . (3x^2 - 5) =$

Série 3. Applique les formules des produits remarquables :

a) $(x + 2) (x - 2) (x^2 - 4) =$ ……………………………………………………………………………………

b) $(a^2 - 1) (a^4 + 1) (a^2 + 1) =$ ……………………………………………………………………………

c) $[(4a - 3) . (4a + 3)]^2 =$ ……………………………………………………………………………………

d) $(3x - 2) (9x^2 - 4)(3x + 2) =$ ……………………………………………………………………………

10 **Effectue** les produits puis réduis les termes semblables :

a) $2x . (3x + 2) - 5 (3x + 6) =$ ……………………………………………………………………………

b) $(3x + 1) . (2x - 4) + (5x^2 - 1)^2$ = ……………………………………………………………………

= ……………………………………………………………………………………………………

c) $(2a - 5b) (2a + 5b) - 3a . (2b + 2)$ = ……………………………………………………………………

d) $3x . (2x - 3) - (3x + 2)^2$ = ……………………………………………………………………………

= ………

e) $(2x - 1)^2 - (3x + 2) (3x - 2)$ = ……………………………………………………………………

= ………

f) $(2x + 3y) (3y - 2x) - (2x + y)^2 =$ ……………………………………………………………………

= ………

g) $(3x + 2) (3 - 2x) - (3x + 2) (2x - 4) =$ ……………………………………………………………

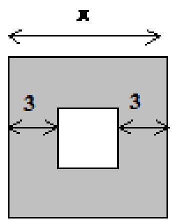
= ………

h) $(3x - 2y)^2 - (4x + 3y)^2 =$ ……………………………………………………………………………

= ....

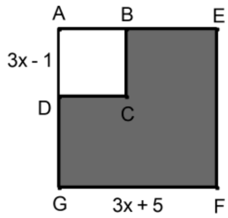
11 a) **Exprime l'aire** de la bande grisée de 3 cm de large dont le carré extérieur mesure x cm de côté.

b) Que vaut l'aire de la partie grisée si x vaut 14 ?

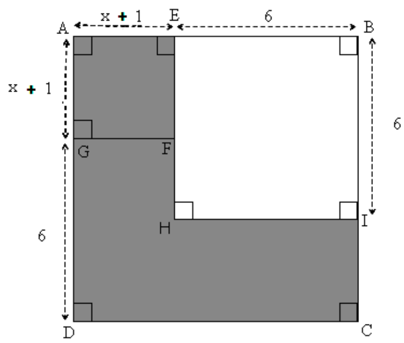


12 a) **Exprime l'aire** de la partie colorée de cette figure si AEGF et ABCD sont des carrés.

b) Que vaut cette aire si x vaut 3 ?



13 a) **Calcule l'aire grisée** en fonction de x si ABCD est un carré.



b) **Calcule l'aire** du polygone GFHICD

14 **Effectue** les divisions suivantes.

a) $6a^3b^5 : 2a^2b^3 =$ ....

b) $-12x^2y : (-4x^2) =$ ....

c) $(9x^5 + 6x^4 - 12x^3) : 3x^2 =$ ....

15 **Recherche le degré du quotient sans effectuer le résultat.**

a) $(5x^2 + 4x^4 - 3x) : (x^2 - 3)$ ....

b) $(5y - 3 + 2y^8) : (5y - 6y^3)$ ....

c) $(2y^6 + 2y^3 - y^4) : (2 - 4y^3)$ ....

16 **Effectue les divisions par calcul écrit (sur feuille quadrillée) et écris tes réponses sous la forme d'une division euclidienne.**

a) $(8x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 12x + 6) : (2x^2) =$

b) $(x^3 - x + 6) : (x + 3) =$

c) $(-3x^4 + 4x^2 - 2x - 1) : (x^2 - x + 2) =$

d) $(8x^3 - 1) : (2x - 1) =$

e) $(x^4 - x^3 + x - 2) : (x^2 - 2x + 4) =$

17 **Effectue les divisions suivantes en appliquant la méthode <u>par Horner</u> (sur feuille quadrillée).**

a) $(3x^3 - 7x^2 + 5x - 10) : (x - 2)$

b) $(-3y^4 - 5y^3 - 1 + 2y^2) : (y + 2)$

c) $(x^3 - 2x^2 + x - 6) : (x + 2)$

d) $(x^2 - 7x + 12) : (x - 4)$

e) $(t^4 - 10 - 7t^2 + t) : (t - 2)$

18 **<u>Sans effectuer la division</u>, calcule le reste des divisions suivantes.**

a) $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$ par $(x - 2)$

b) $3x^2 - x^3 + 4$ par $(x + 2)$

c) $x^4 - 7x^2 + 12$ par $(x + 1)$

19 **Pour quelle valeur de a le polynôme en x.**

a) $3x^2 - 5x + a$ est-il divisible par $(x - 2)$?

b) $6x^2 - ax - 3$ est-il divisible par $(x - 1)$?

c) $4x^3 + 5x^2 + 3x + a$ est-il divisible par $(x + 2)$?

20 Sachant que l'aire d'un rectangle, exprimée en cm² vaut $2x^2 + 11x + 12$ et que sa largeur, exprimée en cm vaut $x + 4$, **détermine l'expression algébrique de sa longueur.**