CORRECTION DU DEVOIR N°5

CHAPITRE 5 : FIGURES SEMBLABLES

(3UAA1 : figures isométriques et figures semblables)

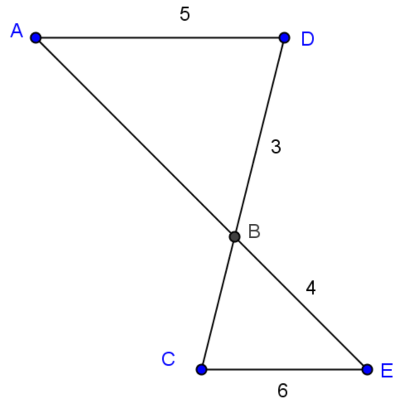
Théorie

5.1. Proportionnalité : propriété fondamentale
5.3. Les similitudes et les figures semblables : définitions et propriétés
5.5. Critères de similitude de deux triangles

Exercices

1) Détermine les triangles semblables, justifie puis écris les proportions correspondantes. Calcule les inconnues.

AD // CE



$$\triangle ABD \sim \triangle EBC \quad \text{car} \quad \begin{cases} |\hat{ABD}| = |\hat{EBC}| & \text{car angles opposés par le sommet} \\ |\hat{ADB}| = |\hat{ECB}| & \text{car angles alternes-internes (AD // CE et CD séc)} \end{cases}$$

2 △ sont semblables s'ils ont 2 angles homologues de même amplitude.

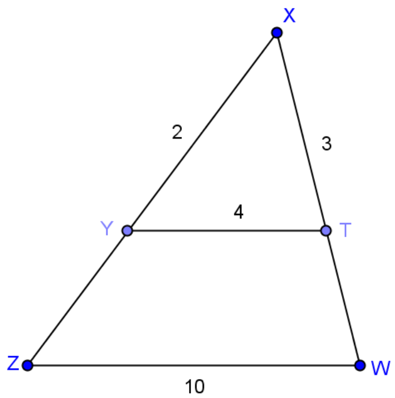
$$\Rightarrow \frac{|AD|}{|EC|} = \frac{|DB|}{|CB|} = \frac{|AB|}{|EB|} \Leftrightarrow \frac{5}{6} = \frac{3}{|CB|} = \frac{|AB|}{4}$$

car les côtés homologues de 2 △ semblables ont des longueurs proportionnelles.

$\frac{5}{6} = \frac{|AB|}{4} \Leftrightarrow 6 \,.\, |AB| = 5 \,.\, 4 \Leftrightarrow |AB| = \frac{20}{6} \Leftrightarrow |AB| = \frac{10}{3} \Leftrightarrow |AB| = 3{,}3$ $\qquad |AE| = |AB| + |BE| = 3{,}3 + 4 = 7{,}3$

$\frac{5}{6} = \frac{3}{|CB|} \Leftrightarrow 5 \,.\, |CB| = 6 \,.\, 3 \Leftrightarrow |CB| = \frac{18}{5} \Leftrightarrow |CB| = 3{,}6$ $\qquad |CD| = |CB| + |BD| = 3{,}6 + 3 = 6{,}6$

TY // WZ



$$\triangle XYT \sim \triangle XZW \quad \text{car} \quad \begin{cases} |\hat{YXT}| = |\hat{ZXW}| & \text{car } \hat{X} \text{ angle commun} \\ |\hat{XYT}| = |\hat{XZW}| & \text{car angles correspondants (TY // WZ et XZ séc)} \end{cases}$$

2 △ sont semblables s'ils ont 2 angles homologues de même amplitude.

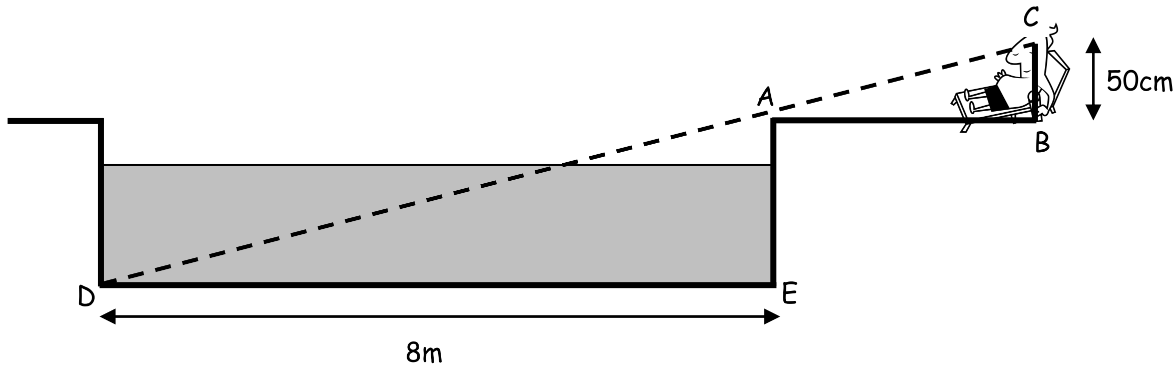
$$\Rightarrow \frac{|XY|}{|XZ|} = \frac{|YT|}{|ZW|} = \frac{|XT|}{|XW|} \Leftrightarrow \frac{2}{|XZ|} = \frac{4}{10} = \frac{3}{|XW|}$$

car les côtés homologues de 2 △ semblables ont des longueurs proportionnelles.

$\frac{2}{|XZ|} = \frac{4}{10} \Leftrightarrow 4 \,.\, |XZ| = 2 \,.\, 10 \Leftrightarrow |XZ| = \frac{20}{4} \Leftrightarrow |XZ| = 5$ $\qquad |YZ| = |XZ| - |XY| = 5 - 2 = 3$

$\frac{4}{10} = \frac{3}{|XW|} \Leftrightarrow 4 \,.\, |XW| = 10 \,.\, 3 \Leftrightarrow |XW| = \frac{30}{4} \Leftrightarrow |XW| = 7{,}5$ $\qquad |TW| = |XW| - |XT| = 7{,}5 - 3 = 4{,}5$

2) Couché sur un transat de 50 cm de haut à 1 m du bord de la piscine, le vacancier n'aperçoit que l'extrémité du fond. Quelle est la profondeur d'eau dans la piscine si sa longueur mesure 8m et que l'eau arrive à 12cm du bord ?



$\triangle ABC \sim \triangle DEA$ car $\begin{cases} |\hat{ABC}| = |\hat{DEA}| = 90° \\ |\hat{BAC}| = |\hat{EDA}| \text{ car angles correspondants } {\scriptstyle (BA \,//\, ED \text{ et } CD \text{ séc})} \end{cases}$

2 △ sont semblables s'ils ont 2 angles homologues de même amplitude.

$\Rightarrow \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EA|} = \frac{|AC|}{|DA|} \Leftrightarrow \frac{100}{800} = \frac{50}{|EA|} = \frac{|AC|}{|DA|}$

car les côtés homologues de 2 △ semblables ont des longueurs proportionnelles.

$\frac{100}{800} = \frac{50}{|EA|} \Leftrightarrow 100 \,.\, |EA| = 50 \,.\, 800 \Leftrightarrow |EA| = 400$

La profondeur mesure 3,88m.

3) Soient deux triangles semblables ABC et A'B'C'.
Si |AB| = 5 cm et |A'B'| = 12 cm et si l'aire du △ ABC vaut 15 cm², quelle est l'aire du △ A'B'C' ?

$k_{\text{agr.}} = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{12}{5}$

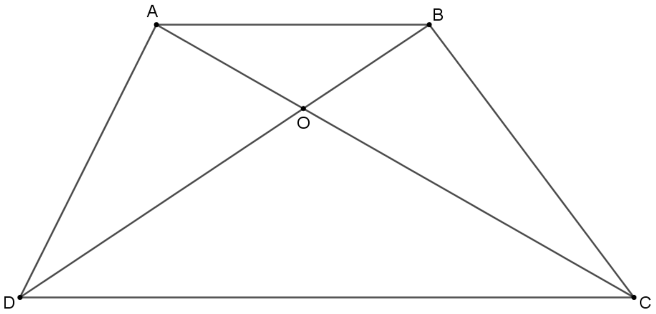
$\text{Aire}_{\triangle A'B'C'} = k^2 \,.\, \text{Aire}_{\triangle ABC} = \left(\frac{12}{5}\right)^2 .15 = \frac{144}{25}.15 = \frac{432}{5} = 86{,}4\text{cm}^2$

4) Soient deux triangles semblables XYZ et X'Y'Z'.
L'aire du △ XYZ mesure 25 cm² et celle du △ X'Y'Z' mesure 900 cm².
Si |XY| = 10 cm, que mesure |X'Y'| ?

$k^2_{\text{agr.}} = \frac{\text{Aire}\Delta X'Y'Z'}{\text{Aire}\Delta XYZ} = \frac{900}{25} = 36 \Leftrightarrow k_{\text{agr.}} = \sqrt{36} = 6$

$|X'Y'| = k \,.\, |XY| = 6 \,.\, 10 = 60\text{cm}$

5) Les diagonales d'un trapèze isocèle ABCD (|AD| = |BC|) se coupent en un point O.
Démontre que |AO| . |CD| = |AB| . |CO|.



Hypothèse : [AB] // [CD]
| AD | = | BC |
[AC] ∩ [BD] = {O}

Thèse : |AO| . |CD| = |AB| . |CO|

- Considérons les triangles AOB et COD.
- $\triangle$ AOB ∽ $\triangle$ COD car
  - |AÔB| = |CÔD| car angles opposés par le sommet
  - |BÂO| = |DCO| car angles alternes-internes (AB // CD et AC sécante)
- On en déduit que les triangles AOB et COD sont semblables, car ils ont 2 angles homologues de même amplitude.
- Donc, $\frac{|AO|}{|CO|} = \left(\frac{|OB|}{|OD|}\right) = \frac{|AB|}{|CD|}$ car les côtés homologues de deux triangles semblables ont des longueurs proportionnelles.
- Conclusion : |AO| . |CD| = |CO| . |AB| car dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.