MATHEMATIQUES 4H/semaine - DEGRE SUPERIEUR - EQUATIONS et INEQUATIONS - REVISIONS

J. ROSSI

23 janvier 2003

Table des matières

Table des figures

0.1 Mode d'emploi

Ce cahier de révision est destiné aux élèves des sections 4 heures par semaine qui doivent revoir certaines notions et certaines méthodes utiles pour aborder les résolutions d'équations et d'inéquations de base. La première partie permet une révision des règles de base de l'algèbre. La seconde partie est consacrée aux équations et aux inéquations de base.

Il est le fruit d'un travail entamé au *Centre d'Auto-formation de la Communauté française à Huy* (C.A.F). Il a été adapté pour répondre aux exigences actuelles des programmes en ce qui concerne les matières traitées .

L'élève doit pouvoir trouver seul une foule de renseignements et revoir les méthodes qui lui font parfois défaut. Une table des matières détaillée permet de retrouver l'information. Des exemples et des exercices d'entraînement permettent de réviser la notion qui pose problème. Certains exercices sont proposés avec solution, d'autres pas. Le professeur peut corriger les résolutions personnelles. L'élève peut toujours demander des explications complémentaires lors des cours.

Bonne révision et bonne réussite.

Mr ROSSI.

Chapitre 1

Factorisation

1.1 Vocabulaire

Factoriser un polynôme (ou une expression algébrique) c'est écrire le polynôme (l'expression algébrique) sous la forme d'un produit de facteurs.

Factoriser se dit aussi décomposer en produits de facteurs. Un polynôme que l'on ne sait pas décomposer en produit de facteurs dans R est dit indécomposable dans R.

Le contraire de "factoriser" c'est "développer"

Exemple : Les **réponse finales** des identités suivantes sont les factorisations du premier membre

a) $6x^2 - 18x = 6x(x-3)$

b) $y^2 - 25 = (y-5)(y+5)$

c) $x^2 - 2 = x^2 - (\sqrt{2})^2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

d) $x^2 + 5x + 4 = x^2 + 4x + x + 4 = x(x+4) + (x+4) = (x+4)(x+1)$

e) $8x^3 + 27 = (2x)^3 + 3^3 = (2x+3)(4x^2 - 6x + 9)$

Le trinôme $4x^2 - 6x + 9$ est indécomposable dans R.

1.2 Méthodes de factorisation de base

Les méthodes de factorisation rappelées ci-dessous sont les méthodes élémentaires.

1.2.1 Pour les binômes

1) Mise en évidence :

$ab + ac = a(b+c)$

2) Identités remarquables :

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

D'autres identités remarquables existent pour $a^n \pm b^n$ avec n entier plus grand que 3. En particulier

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a + 1)$$

Remarque :
Le binôme $a^2 + b^2$ (somme de deux carrés) est indécomposable dans R.

1.2.2 Pour les trinômes

1) Mise en évidence
$ab + ac + ad = a(b + c + d)$
2) Identités remarquables
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
3) Factorisation du trinôme du second degré

Le trinôme $ax^2 + bx + c$ se factorise dans R si et seulement si le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est positif ou nul.

Si $b^2 - 4ac > 0$ alors le trinôme s'annule pour $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Il se factorise comme suit :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Si $b^2 - 4ac = 0$ alors le trinôme s'annule pour $x_1 = \frac{-b}{2a}$ et il se factorise comme suit

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

Si $b^2 - 4ac < 0$ alors le trinôme est indécomposable dans R.

1.2.3 Pour les polynômes en général

1) Mise en évidence
2) Groupement de termes puis mise en évidence
Exemple :
$2a^4 - 2a^3 + 3a - 3 = 2a^3(a - 1) + 3(a - 1) = (a - 1)(2a^3 + 3)$

Le binôme $2a^3 + 3$ est encore décomposable comme somme de deux cubes puisque $2a^3 + 3 = (\sqrt[3]{2}a)^3 + (\sqrt[3]{2})^3$.

3) Autres identités utiles
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$
$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$
$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a + b + c)^2$
$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac = (a - b + c)^2$
...
4) Factorisation par division par $x - a$

La division par $x-a$ est aussi connue sous le nom de "méthode de Horner". Si $P(x)$ est un polynôme qui s'annule pour $x = a$, il est alors divisible par le binôme $x - a$. On cherche alors le quotient de la division grâce à une disposition pratique appelée grille de Horner.

Exemple :
Soit le polynôme $P(x) = x^3 + 4x^2 + 3x - 2$
On trouve $P(-2) = 0$

Le polynôme est donc divisible par $x + 2$. On dresse un tableau appelé grille de Horner (demandez des explications supplémentaires si nécessaire). Ce tableau est un moyen pratique de réaliser la division euclidienne de $x^3 + 4x^2 + 3x - 2$ par $x + 2$.

coefficients de $P(x)$ $\rightarrow$	1	4	3	-2
Valeur de a : -2		-2	-4	2
coefficents du quotient $\rightarrow$	1	2	-1	$0 = reste$

Le quotient de la division de $P(x)$ par $x + 2$ est $x^2 + 2x - 1$. Remarquez que le reste de la division vaut zéro.

On a donc une première transformation

$$x^3 + 4x^2 + 3x - 2 = (x + 2)(x^2 + 2x - 1)$$

Le trinôme x^2+2x-1 est encore décomposable en produit de deux facteurs du premier degré (à faire).

1.3 Exercices

1.3.1 Entraînement à la factorisation

Factorisez les expressions suivantes :
a) $1 - 64t^3$
b) $a^5 - a$
c) $(a - b)^2 - x^2$
d) $3a^3 + 24$

e) $1 + 2y^2 + y^4$
f) $x^2 - x + \frac{1}{4}$
g) $x^3 - 3x + 2$
h) $x^3 + 4x^2 + 3x - 2$
i) $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$
j) $x^6 + 16x^4 - 8x^5$
Réponses :
a) $(1 - 4t)(1 + 4t + 16t^2)$
b) $a(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1)$
c) $(a - b - x)(a - b + x)$
d) $3(a + 2)(a^2 - 2a + 4)$
e) $(1 + y^2)^2$
f) $(x - \frac{1}{2})^2$
g) $(x + 2)(x - 1)^2$
h) $(x + 2)(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$
i) $(x - 1)(x - 2)(x^2 + 1)$
j) $x^4(x - 4)^2$

1.3.2 Utilisations de la factorisation

1) Simplifiez la fraction $\frac{-x^2-4x-4}{x^2+x-2}$

Méthode : pour simplifier une fraction rationnelle il faut factoriser le numérateur et le dénominateur de cette fraction et simplifier ensuite les facteurs communs.

Réponse : $-\frac{x+2}{x-1} \qquad (x \neq 1 \text{ et } x \neq 2)$

2) Effectuez l'addition $\frac{-b}{a^2-b^2} - \frac{a}{(a^2+ab)^2}$

Méthode : voir section "comment additionner deux fractions"

La réduction au même dénominateur exige d'abord la factorisation des dénominateurs. Dans ce cas ci on a :

$\frac{-b}{a^2-b^2} - \frac{a}{(a^2+ab)^2} = \frac{-b}{(a+b)(a-b)} - \frac{a}{[a(a+b)]^2} = \frac{-b}{(a+b)(a-b)} - \frac{1}{a(a+b)^2}$

Pour la réduction au même dénominateur faites le produit de tous les facteurs différents des deux dénominateurs avec leurs plus grands exposants : vous obtenez PPCM des dénominateurs : c'est le dénominateur commun.

Réponse finale :$-\frac{ba^2+b^2a+a-b}{a(a+b)^2(a-b)}$

3) Résolution d'équations et d'inéquations

La factorisation d'expressions est également utile pour la résolution d'équations et d'inéquations : revoir ces chapitres si nécessaire.

Chapitre 2

Equations, inéquations à une inconnue

2.1 Equations à une inconnue

2.1.1 Equations du premier degré

$ax + b = 0$ avec $a \neq 0$ est une équation du premier degré. Les lettres a et b représentent des nombres supposés connus. La lettre x représente le nombre inconnu ou l'inconnue.

Résolution :
$ax + b = 0 \qquad a \neq 0$
$ax = -b$
$x = \frac{-b}{a}$
Cas particulier important :
$ax = 0 \qquad a \neq 0$
donne $x = 0$
Exemples :
a)
$-2x + 1 = 0$
$-2x = -1$
$x = \frac{-1}{-2}$
$x = \frac{1}{2}$
Ensemble des solutions de l'équation : $S = \{\frac{1}{2}\}$
b)
$3x = 0$
$x = 0$
Ensemble des solutions de l'équation : $S = \{0\}$

2.1.2 Equations réductibles au premier degré : règle du produit nul.

Certaines équations sont réductibles au premier degré. Cela veut dire qu'elles se ramènent à des équations du premier degré grâce à la règle suivante.

Règle du produit nul :

Le produit de deux (ou plusieurs) facteurs est nul si et seulement si un des facteurs du produit est nul

Mathématiquement, pour deux facteurs, cette règle s'écrit :

$$a.b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \ \ ou \ \ b = 0$$

Exemple :

L'équation

$(x - 2)(2x + 3) - 2(3x - 2)(x - 2) = 0$

a un premier membre qui se factorise. On a :

$(x - 2)[2x + 3 - 2(3x - 2)] = 0$

$(x - 2)(-4x + 7) = 0$

Par application de la règle du produit nul on a :

$x - 2 = 0 \qquad ou \qquad -4x + 7 = 0$

On résoud alors ces deux équations du premier degré et on trouve l'ensemble des solutions :

$S = \{\frac{7}{4}, 2\}$

Utilisation des produits remarquables.

L'utilisation des produits remarquables permet souvent de factoriser le premier membre. Voir section : "Méthodes de factorisation de base".

Remarque : rappelons-nous toujours qu'une somme de deux carrés, telle que $x^2 + a^2$ n'est pas factorisable.

Exemple de résolution d'équations réductibles au premier degré.

a)

$(x - 2)^2 = 0$

$(x - 2)(x - 2) = 0$

$(x - 2) = 0$

$x = 2$

$S = \{2\} \qquad racine\ double$

b)

$x^2 - 4 = 0$

$(x - 2)(x + 2) = 0$

$x - 2 = 0 \qquad ou \qquad x + 2 = 0$

$x = 2 \qquad ou \qquad x = -2$

$S = \{-2, 2\}$

2.1.3 Exercices d'entraînement.

Résoudre les équations suivantes (elles sont toutes réductibles à des équations du premier degré)

a) $4x^2 - (x+3)^2 = 0$

b) $2\pi y + 4 = \frac{\pi}{2}$ *inconnue :* y

c) $t^3 - 3t^2 - t + 3 = 0$ *inconnue :* t

d) $\frac{3(x-1)}{x+1} - \frac{2(x-1)}{x-2} = \frac{x^2+x-2}{(x+1)(x-2)}$

Important : pour cette dernière équation il faut commencer par poser les conditions, à savoir : $x + 1 \neq 0$ *et* $x - 2 \neq 0$.

Réponses

a) $S = \{-1, 3\}$

b) $S = \{\frac{\pi-8}{4\pi}\}$

c) $S = \{-1, 1, 3\}$

d) $S = \{\frac{11}{10}\}$

2.1.4 Equations du second degré

Rappel.

L'équation du second degré d'inconnue x s'écrit sous la forme

$ax^2 + bx + c = 0$ *avec* $a \neq 0$.

Calcul de $\Delta = b^2 - 4ac$

Trois cas peuvent se présenter :

Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions réelles données par la formule $\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Vocabulaire : les solutions d'une équation sont aussi appelées racines.

Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une solution réelle, appelée aussi racine double, et donnée par la formule $\frac{-b}{2a}$

Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solution réelle.

Exemples :

a)

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = 1$

donc deux solutions réelles

$x = \frac{3+\sqrt{1}}{2} = 2$ *ou* $x = \frac{3-\sqrt{1}}{2} = 1$

On a donc : $S = \{1, 2\}$

b)

$9x^2 - 30x + 25 = 0$

$\Delta = 0$

donc une solution

$x = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$

donc $S = \{\frac{5}{3}\}$

Remarque : dans le cas $\Delta = 0$, le trinôme du second degré **est un carré parfait**. Ici on a : $9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2$.

A partir de cette remarque on retrouve la même solution par une équation réductible au premier degré. On a :

$(3x - 5)^2 = 0$

On comprend bien pourquoi on parle de racine **double**, on a :

$(3x - 5)(3x - 5) = 0$

$3x - 5 = 0$

$3x = 5$

$x = \frac{5}{3}$.

c)

$x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = -3$

Donc pas de solution réelle.

2.1.5 Equations bicarrées

Les équation bicarrées se réduisent à des équations du second degré.

Exemple :

$x^4 - 7x^2 - 18 = 0$ est une équation bicarrée.

On pose $y = x^2$

L'équation s'écrit

$y^2 - 7y - 18 = 0$

$\Delta = 121$

$y = \frac{7+11}{2} = 9 \quad ou \quad y = \frac{7-11}{2} = -2$

On va pouvoir trouver x en résolvant

$x^2 = 9 \quad et \quad x^2 = -2$

1°) $x^2 = 9$ donne $x = 3 \quad ou \quad x = -3$

2°) $x^2 = -2$ *est impossible.*

Conclusion : $S = \{-3, 3\}$

2.1.6 Equations irrationnelles

Certaines équations irrationnelles se ramènent à une équation du second degré.

Exemple :

$x - \sqrt{2x + 15} = 0$

$x = \sqrt{2x + 15}$

Conditions d'existence :

$x \geq 0 \quad et \quad 2x + 15 \geq 0$

donc
$x \geq 0 \qquad et \qquad x \geq -\frac{15}{2}$
donc, il reste comme condition unique $x \geq 0$.
Revenons à notre équation
$x = \sqrt{2x+15}$
Les deux membres sont positifs donc on peut les éléver au carré et on obtient une équation équivalente
$x^2 = 2x + 15$
$x^2 - 2x - 15 = 0$
$\Delta = 64$
$x = \frac{2+8}{2} = 5 \qquad ou \qquad x = \frac{2-8}{2} = -3$ *à rejeter vu la condition*!
Donc finalement $S = \{5\}$
NB : le nombre -3 a été trouvé comme solution de l'équation $x^2 = 2x+15$ mais n'EST PAS solution de l'équation $x = \sqrt{2x+15}$.

Les conditions sont très importantes pour pouvoir rejeter des solutions étrangères éventuelles.

2.1.7 Exercices

Résoudre les équations suivantes
$a)$ $(u^2 + 4u + 4)(2u^2 - 5u + 3) = 0$
$b)$ $y^3 - 3y^2 + 3y - 2 = 0$
$c)$ $3x^6 - 13x^4 - 10x^2 = 0$
$d)$ $\sqrt{x^2 - 16} + x - 2 = 0$
$e)$ $\frac{1}{y} = 3(2y + 3)$
Réponses :

$a)$ Appliquez d'abord la règle du produit nul puis résolvez deux équations du second degré. On trouve : $S = \{-2, 1, \frac{3}{2}\}$

$b)$ Factorisez le premier membre par la méthode de Horner. On appliquera ensuite la règle du produit nul. On trouve $S = \{2\}$

$c)$ Mettre x^2 en évidence et appliquer la règle du produit nul.
On trouve $S = \{-\sqrt{5}, 0, \sqrt{5}\}$
$d)$ Isolons la racine carrée : l'équation devient $\sqrt{x^2 - 16} = 2 - x$
Les conditions sont
$x^2 - 16 \geq 0 \qquad et \qquad 2 - x \geq 0.$

La première condition $x^2 - 16 \geq 0$ est une inéquation du second degré. La méthode de résolution par tableau de signe est expliquée dans la section "inéquations du second degré".

L'intersection des conditions donne finalement la condition $x \leq -4$.

La résolution de l'équation par élévation des deux membres au carré donne $x = 5$. Cette solution est à rejeter. Donc il n'y a pas de solution. L'équation proposée est impossible : $S = \emptyset$.

$e)\ y = \frac{-9+\sqrt{105}}{12} \quad ou \quad y = \frac{-9-\sqrt{105}}{12}$

$S = \{\frac{-9-\sqrt{105}}{12}, \frac{-9+\sqrt{105}}{12}\}$

2.1.8 Equations trigonométriques. Sections à 4H/sem

La résolution des équations trigonométriques peut s'avérer très compliquée. Dans les cas simples, on se ramène rapidement aux équations suivantes :

$\sin(x) = \sin(a)$ x est l'inconnue.

$\cos(x) = \cos(a)$

$tg(x) = tg(a)$

Voici les solutions de ces équations.

$\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow x = a + k.2\pi \quad ou \quad x = \pi - a + k.2\pi$

$\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow x = a + k.2\pi \quad ou \quad x = -a + k.2\pi$

$tg(x) = tg(a) \Leftrightarrow x = a + k.\pi$

Pour les trois cas on a $k \in Z$.

Le nombre k est un nombre entier. Le nombre $k.2\pi$ désigne donc un nombre entier de tours sur le cercle trigonométrique et le nombre $k.\pi$ désigne un nombre entier de demi-tours sur ce cercle.

Compréhension des solutions des équations ci-dessus : L'équation $\sin(x) = \sin(a)$ exprime l'égalité de deux sinus. Les deux sinus sont égaux quand les angles x et a sont égaux mais aussi quand ces angles sont supplémentaires. Sur la figure 2.1 vous voyez clairement que les sinus d'angles supplémentaires sont égaux.

Les deux cosinus sont égaux quand les angles x et a sont égaux mais aussi quand ces angles sont opposés.

On constate sur la figure 2.1 que les cosinus d' angles opposés sont égaux.

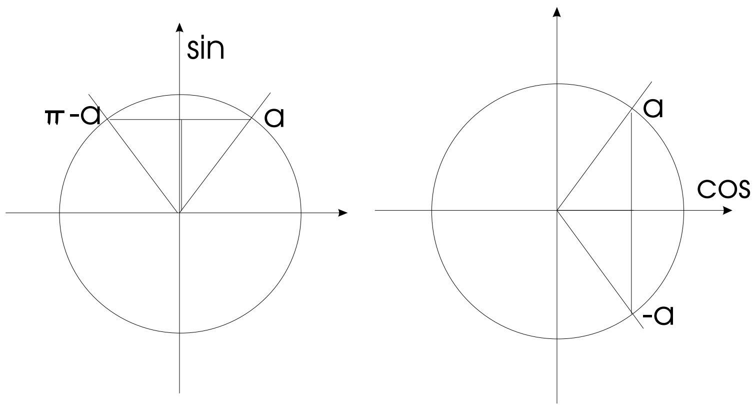

FIG. 2.1 – Les sin d'angles supplémentaires sont égaux et les cos d'angles opposés sont égaux.

Pour l'égalité des tangentes, on constate sur le figure 2.2 que on a bien $tg(x) = tg(a)$ quand $x = a$ mais aussi quand $x = \pi + a$.

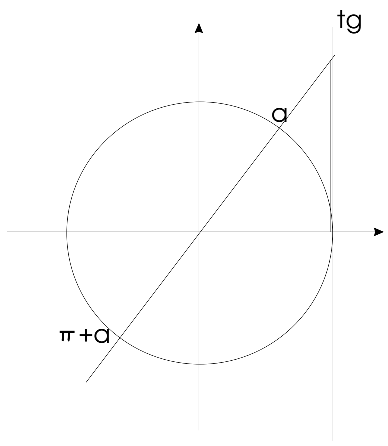

FIG. 2.2 – Les tg d'angles anti-supplémentaires sont égales.

Certaines formules sont employées dans les cas les plus simples. Ce sont les suivantes :

$-\sin(a) = \sin(-a)$

$-tg(a) = tg(-a)$

$-\cos(a) = \cos(\pi - a)$

$\cos(a) = \sin(\frac{\pi}{2} - a)$

$\sin(a) = \cos(\frac{\pi}{2} - a)$

Ces formules sont une toute petite partie des formules à connaître. D'autres seront vues pendant l'année. Elles seront également utiles pour résoudre des équations trigonométriques.

2.1.9 Exercices

Résoudre les équations suivantes

1) $2\sin x - 1 = 0$
2) $2\sin 3x + \sqrt{2} = 0$
3) $2\cos x + \sqrt{2} = 0$
4) $2.\cos 2x - 1 = 0$
5) $tg4x - 1 = 0$
6) $3tg3x + \sqrt{3} = 0$
7) $\sin 3x - \cos 2x = 0$
8) $\sin 3x + \cos 2x = 0$
9) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$
10) $\sin^2 3x - \cos 3x = 0$
11) $\sin^2 x - \cos^2 x = 0$
12) $6\cos^3 x + 2\cos^2 x - 3\cos x - 1 = 0$

Solutions :

1) $2\sin x - 1 = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$

$x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi \qquad ou \qquad x = \pi - \frac{\pi}{6} + k.2\pi$

$x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi \qquad ou \qquad x = \frac{5\pi}{6} + k.2\pi \qquad k \in Z.$

2) $2\sin 3x + \sqrt{2} = 0$

$\sin 3x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$\sin 3x = -\sin\frac{\pi}{4}$

$\sin 3x = \sin(-\frac{\pi}{4})$

$3x = -\frac{\pi}{4} + k.2\pi \qquad ou \qquad 3x = \pi - (-\frac{\pi}{4}) + k.2\pi$

$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k.2\pi}{3} \qquad ou \qquad 3x = \frac{5\pi}{4} + k.2\pi$

$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k.2\pi}{3} \qquad ou \qquad x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k.2\pi}{3} \qquad k \in Z.$

3) $2\cos x + \sqrt{2} = 0$

$\cos x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$\cos x = -\cos\frac{\pi}{4}$

$\cos x = \cos(\pi - \frac{\pi}{4})$

$\cos x = \cos\frac{3\pi}{4}$

$x = \frac{3\pi}{4} + k.2\pi \qquad ou \qquad x = -\frac{3\pi}{4} + k.2\pi \qquad k \in Z.$

4) On trouve $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \qquad ou \qquad x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \qquad k \in Z.$

5) $tg4x - 1 = 0$

$tg4x = 1$

$tg4x = tg\frac{\pi}{4}$

$4x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4} \qquad k \in Z.$

6) $3tg3x + \sqrt{3} = 0$
$tg3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
$tg3x = -tg\frac{\pi}{6}$
$tg3x = tg(-\frac{\pi}{6})$
$3x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$
$x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \qquad k \in Z.$
7) $\sin 3x - \cos 2x = 0$
$\sin 3x = \cos 2x$
$\sin 3x = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)$
$3x = \frac{\pi}{2} - 2x + k.2\pi \qquad ou \qquad 3x = \pi - (\frac{\pi}{2} - 2x) + k.2\pi$
$5x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi \qquad ou \qquad 3x = \frac{\pi}{2} + 2x + k.2\pi$
$x = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \qquad ou \qquad x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi \qquad k \in Z.$
8)On trouve $x = -\frac{\pi}{2} + k.2\pi \qquad ou \qquad x = \frac{3\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \qquad k \in Z.$
9)On pose $\cos x = y$
L'équation donnée devient une équation du second degré en y.
$2y^2 - y - 1 = 0$
Ce qui donne : $y = 1 \qquad ou \qquad y = -\frac{1}{2}$
On doit donc ensuite résoudre
$\cos x = 1 \qquad ou \qquad \cos x = -\frac{1}{2}$
Ce qui donne
$x = k.2\pi \qquad ou \qquad x = \frac{2\pi}{3} + k.2\pi \qquad ou \qquad x = -\frac{2\pi}{3} + k.2\pi \qquad k \in Z.$
10) $\sin^2 3x - \cos 3x = 0$

Dans ce cas, on utilise une formule qui doit être connue, à savoir la formule fondamentale de la trigonométrie. On a $\sin^2 x + \cos^2 3x = 1$ pour tout x, ce qui entraîne $\sin^2 3x = 1 - \cos^2 3x$, pour tout x.

Remplaçons dans l'équation donnée on obtient :
$-\cos^2 3x - \cos 3x + 1 = 0$
Posons $\cos 3x = y$

On obtient une équation du second degré en y qui donne deux solutions pour y, à savoir : $y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \qquad ou \qquad y = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Revenons à l'inconnue de départ. On doit résoudre
$\cos 3x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \qquad ou \qquad \cos 3x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

La première équation se résoud grâce à une calculatrice et la deuxième équation est impossible car le cosinus est compris entre -1 et 1.

Pour $\cos 3x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$on trouve
$3x = \arccos(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}) \cong 0.904\,56$
$x \cong \frac{0.904\,56}{3} + 2k\frac{\pi}{3} \qquad ou \qquad x \cong \frac{-0.904\,56}{3} + 2k\frac{\pi}{3}$:
$x \cong 0.301\,52 + 2k\frac{\pi}{3} \qquad ou \qquad x \cong -0.301\,52 + 2k\frac{\pi}{3} \qquad k \in Z.$
11) $\sin^2 x - \cos^2 x = 0$
factorisons, on a :

$(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) = 0$
appliquons la règle du produit nul, on a alors :
$\sin x - \cos x = 0 \qquad ou \qquad \sin x + \cos x = 0$
cela nous donne deux équations à résoudre.
On trouve
$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \qquad ou \qquad x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \qquad k \in Z.$
12) $6\cos^3 x + 2\cos^2 x - 3\cos x - 1 = 0$
On peut poser $\cos x = y$ et vérifier que l'on obtient un polynôme du troisième degré en y qui se factorise.
Après factorisation on obtient :
$(2y^2 - 1)(3y + 1) = 0$
revenons à l'inconnue de départ, on a :
$(2\cos^2 x - 1)(3\cos x + 1) = 0$
appliquons la règle du produit nul
$2\cos^2 x - 1 = 0 \qquad ou \qquad 3\cos x + 1 = 0$
et il faut alors résoudre ces deux équations.
On trouve : $x = \pm\frac{\pi}{4} + k.2\pi \qquad ou \qquad x = \pm\frac{3\pi}{4} + k.2\pi \qquad ou$
$x \cong \pm 1,91 + k.2\pi \qquad k \in Z.$

2.1.10 Equations exponentielles et logarithmiques. Sections à 4H/sem

Equations de base

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y \qquad pour\, tout\, x, y \in R \qquad avec\, a > 0\, et\, a \neq 1$$

en particulier

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y \qquad pour\, tout\, x, y \in R$$

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y \qquad pour\, tout\, x > 0, y > 0\, et\, a > 0\, et\, a \neq 1$$

en particulier

$$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y \qquad pour\, tout\, x > 0, y > 0$$

Rappel

Deux fonctions exponentielles et logarithmiques de même base sont réciproques.

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y \;\; pour\, tout\, x \in R, y > 0\, et\, a > 0\, et\, a \neq 1$$

En particulier :

$$e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y \;\; pour\, tout\, x \in R, y > 0$$

Exemples de résolution d'équations de base
$a)\, e^x - 2 = 0$
$e^x = 2$
$x = \ln 2$
$b)\, 2^x - 5 = 0$
$2^x = 5$
$x = \log_2 5$
$c)\, \ln x - 3 = 0$ Condition : $x > 0$
$\ln x = 3$
$x = e^3$
$d)\, \log_2 x + 6 = 0$ Condition : $x > 0$
$\log_2 x = -6$
$x = 2^{-6}$
$x = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

2.1.11 Exercices

1) $e^{2x+1} - 8 = 0$
2) $e^{3x} + 4 = 0$
3) $3^{2x} = 7$
4) $2^x + 2^{x+1} = 3$
5) $3^{2x} = 27$
6) $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$
7) $16^x - 7.4^x = 8$
8) $5^{x+1} + 2.5^{-x} = 7$
9) $\ln 3x = 1$
10) $\log_3 2x - 5 = 0$
11) $\ln(3x + 1) + 5 = 0$
12) $(\ln x - 2)(\ln 2x + 3) = 0$
13) $\ln^2 x - 2\ln x - 3 = 0$
14) $(\log_2 3x)^2 - 3\log_2 3x - 4 = 0$
Quelques résolutions :
1) $e^{2x+1} - 8 = 0$

$e^{2x+1} = 8$

$2x + 1 = \ln 8$

$x = \frac{\ln(8)-1}{2}$

NB : la parenthèse autour du nombre 8 est utile pour ne pas faire de confusion entre $\ln(8) - 1$ et $\ln(8 - 1)$, mais elle n'est pas obligatoire.

2) $e^{3x} + 4 = 0$

$e^{3x} = -4$

$3x = \ln(-4)$!!!

Equation impossible.

On remarque rapidement que l'équation est impossible car e^{3x}est strictement positif, donc ne peut être égal à -4.

3) $3^{2x} = 7$

$x = \frac{1}{2}\log_3 7$

4) $2^x + 2^{x+1} = 3$

$2^x + 2^x.2 = 3$

$3.2^x = 3$

$2^x = 1$

$x = 0$

5) $3^{2x} = 27$

$3^{2x} = 3^3$

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$

6) $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$

On pose $e^x = y$ et on remarque que $e^{2x} = (e^x)^2 = y^2$

Donc, on a :

$y^2 - 5y + 4 = 0$

On trouve $y = 4$ *ou* $y = 1$

Revenons aux inconnues de départ

Pour $y = 4$ on a : $e^x = 4$ donc $x = \ln 4$

Pour $y = 1$ on a : $e^x = 1$ donc $x = 0$

7) $16^x - 7.4^x = 8$

$4^{2x} - 7.4^x - 8 = 0$

On pose $y = 4^x$

On trouve $y = 8$ *ou* $y = -1$

On doit résoudre :

$4^x = 8$ donc $x = \log_4 8 = \frac{3}{2}$

et $4^x = -1$ est impossible car l'exponentielle 4^x est strictement positive.

8) $5^{x+1} + 2.5^{-x} = 7$

$5^x.5 + 2.\frac{1}{5^x} = 7$

Multiplions les deux membres par 5^x, on a :

$5.(5^x)^2 + 2 = 7.5^x$

posons $5^x = y$ nous obtenons l'équation du second degré
$5y^2 - 7y + 2 = 0$
On trouve $y = 1 \quad ou \quad y = \frac{2}{5}$
Donc on doit résoudre :
$5^x = 1$ donc $x = 0$
$5^x = \frac{2}{5}$ donc $x = \log_5 \frac{2}{5} = \log_5 2 - \log_5 5 = \log_5 2 - 1$
9) $\ln 3x = 1$
Condition : $3x > 0$ donc $x > 0$
$\ln 3x = \ln e$
$3x = e$
$x = \frac{e}{3} \cong 0.906\,09$
10) $\log_3 2x - 5 = 0$
La condition est : $x > 0$
La solution est : $x = \frac{3^5}{2} = 121.5$
11) $\ln(3x + 1) + 5 = 0$
La condition est : $x > -\frac{1}{3}$
La solution est : $x = \frac{e^{-5} - 1}{3} \cong ...$
12) $(\ln x - 2)(\ln 2x + 3) = 0$
On applique la règle du produit nul. On obtient deux équations à résoudre :
$\ln x - 2 = 0 \quad ou \quad \ln 2x + 3 = 0$
La condition pour les deux équations est commune : $x > 0$.
La première équation donne $x = e^2 \cong 7.389\,1$
La deuxième équation donne : $x = \frac{e^{-3}}{2} \cong 2.489\,4 \times 10^{-2}$
13) $\ln^2 x - 2 \ln x - 3 = 0$
Poser $y = \ln x$ Condition : $x > 0$.
On trouve $y = 3 \quad ou \quad y = -1$
Pour $y = 3$ on a $\ln x = 3$ donc $x = e^3 \cong ...$
Pour $y = -1$ on a $\ln x = -1$ donc $x = e^{-1} = \frac{1}{e} \cong ...$
14) $(\log_2 3x)^2 - 3 \log_2 3x - 4 = 0$
Condition : $x > 0$
Solutions : $x = \frac{16}{3} \quad ou \quad x = \frac{1}{6}$

Remarque importante :

D'autres formules également utiles lors de la résolution d'équations exponentielles ou logarithmiques seront vues pendant l'année.

2.2 Inéquations à une inconnue

2.2.1 Principes de résolution des inéquations à une inconnue

Lors de la résolution d'une inéquation à une inconnue les principes de base sont les suivants.

Si l'inéquation est du premier degré

$$ax + b \lesseqgtr 0 \tag{2.1}$$

alors on la résoud algébriquement.

Si l'inéquation est du second degré

$$ax^2 + bx + c \lesseqgtr 0 \tag{2.2}$$

alors on a recours au tableau de l'étude du signe de la fonction du second degré.

Si l'inéquation est sous la forme d'un produit de facteurs dans lesquels intervient l'inconnue x

$$A(x).B(x) \lesseqgtr 0 \tag{2.3}$$

ou sous la forme d'un quotient

$$\frac{A(x)}{B(x)} \lesseqgtr 0 \tag{2.4}$$

alors on a recours à l'étude du signe d'un produit ou d'un quotient.

Toute inéquation qui peut se ramener à une des 3 dernières formes 2.2, 2.3, 2.4, ci-dessus doit donc être résolue par "tableau de signes".

Seule la forme 2.1 peut être résolue sans avoir recours à un tableau de signes.

2.2.2 Règles d'équivalence des inégalités

$a < b \Leftrightarrow a + r < b + r \qquad pour\, tout\, r \in R$

$a < b \Leftrightarrow a.r < b.r \qquad si\, r > 0$

$a < b \Leftrightarrow a.r > b.r \qquad si\, r < 0$

Les deux dernières règles s'énoncent comme suit :

Si on multiplie (ou si on divise) les deux membres d'une inégalité par un nombre strictement positif, on obtient une inégalité de même sens.

Si on multiplie (ou si on divise) les deux membres d'une inégalité par un nombre strictement **négatif**, on obtient une inégalité de sens **contraire.**

Conséquence immédiate :

Dans l'inéquation

$$\frac{A(x)}{B(x)} \leqslant 0$$

on ne peut pas "supprimer" le dénominateur car cela revient à multiplier l'inéquation par un nombre dont on ne connaît pas le signe ! ! !

Evidemment, si le dénominateur est strictement positif on peut le supprimer sans changer le sens de l'inéquation. S'il est strictement négatif on peut le supprimer à condition de changer le sens de l'inéquation.

2.2.3 Etude du signe de la fonction du premier degré

L'étude du signe de la fonction $y = ax + b\,(a \neq 0)$ peut se résumer de la manière suivante.

– **Recherche du zéro de la fonction** $y = ax + b$

$ax + b = 0$

$ax = -b$

$x = \frac{-b}{a}$

Cette valeur de x s'appelle le **zéro** de la fonction ou la **racine** de l'équation $ax + b = 0$.

– **Tableau des signes de la fonction** $y = ax + b$

valeurs de x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax + b$		signe **contraire** de a	0	signe de a	

Compréhension du tableau des signes ci-dessus.

La compréhension de ce tableau passe par l'observation attentive des graphiques représentés figure 2.3 Sur cette figure, le graphique de gauche montre la représentation d'une fonction du premier degré avec $a > 0$. On voit que les valeurs de y de la fonction $y = ax = b$ sont positives si $x > \frac{-b}{a}$.

Sur le graphique de droite, qui représente une fonction du premier degré avec $a < 0$, on voit que les valeurs de $y = ax + b$ sont négatives si $x > \frac{-b}{a}$.

Dans les deux cas, on voit donc que les valeurs de y ont le **même signe** que a si $x > \frac{-b}{a}$.

On observe évidemment que les valeurs de y ont le **signe contraire** de a si $x < \frac{-b}{a}$.

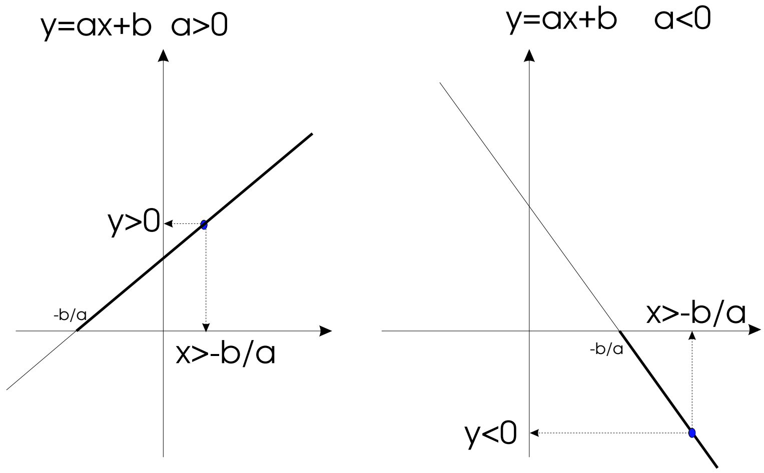

FIG. 2.3 – Signe de la fonction $y = ax + b$.

Exemples
Résoudre les inéquation suivantes
$a) 3x + 5 \geq 0$
– Résolution algébrique :
$3x \geq -5$
$x \geq \frac{-5}{3}$
$S = [\frac{-5}{3}, +\infty[$
– Résolution par tableau de signe :
Recherche du zéro :
$3x + 5 = 0$
$3x = -5$
$x = -\frac{5}{3}$
Tableau des signes :

x	$-\infty$		$\frac{-5}{3}$		$+\infty$
$3x + 5$		$-$	0	$+$	

On a donc l'ensemble des solutions : $S = [\frac{-5}{3}, +\infty[$.

$b) -3x + 5 \geq 0$
– Résolution algébrique :
$-3x \geq -5$
$x \leq \frac{5}{3}$
$S =]-\infty, \frac{5}{3}]$
– Résolution par tableau de signes :
Recherche du zéro :
$-3x + 5 = 0$

$-3x = -5$
$x = \frac{5}{3}$
Tableau des signes :

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$-3x+5$		$+$	0	$-$	

On a donc l'ensemble des solutions : $S =]-\infty, \frac{5}{3}]$

2.2.4 Etude du signe de la fonction du second degré

L'étude du signe de la fonction $y = ax^2 + bx = c\,(a \neq 0)$ peut se résumer de la manière suivante.

– **Recherche des zéros éventuels de la fonction** $y = ax^2+bx+c = 0$ (voir section"équations du second degré")

Calcul de $\Delta = b^2 - 4ac$

Trois cas peuvent se présenter :

Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux racines réelles x_1 et x_2 données par la formule $\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une racine réelle x_1 (double) donnée par la formule $\frac{-b}{2a}$

Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de racine réelle.

– **Tableau des signes de la fonction** $y = ax^2 + bx + c$

Règle : Les valeurs y de la fonction $y = ax^2 + bx + c$ prennent toujours le même signe que a, sauf dans le cas $\Delta > 0$ si x est compris entre les nombres x_1 et x_2.

Tableau des signes :

Si $\Delta > 0$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a	0	**signe $\neq$ de a**	0	signe de a

Si $\Delta = 0$

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

Si $\Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	

Des graphiques représentant des fonctions du second degré vous permettrons de bien comprendre les signes de $y = ax^2+bx+c$. Voyez les exemples-ci dessous.

Exemples.

Résoudre les inéquations du second degré.

a) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

– Recherche des racines :

$\Delta > 0$ et les racines sont 1 et 2

– Tableau des signes

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est : $S =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$.

Observez la figure 2.4 qui donne la représentation graphique de la fonction $y = x^2 - 3x + 2$. Vous constatez que les valeurs négatives de cette fonction, donc les y négatifs sont obtenus pour x compris entre 1 et 2. Par contre, les valeurs positives de la fonction, donc les y positifs, sont obtenus si x est plus petit que 1 ou plus grand que 2.

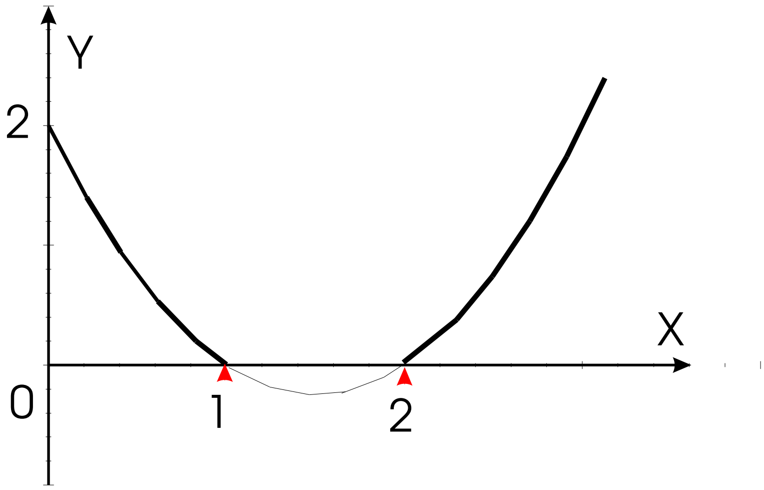

FIG. 2.4 – Signe de la fonction $y = ax^2 + bx + c$ si $\Delta > 0$: le signe de y est le signe de a sauf si x est compris entre les racines.

b) $9x^2 - 30x + 25 > 0$

– Recherche des racines :

$\Delta = 0$ donc on a une racine double qui est $\frac{5}{3}$

– Tableau des signes :

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$9x^2 - 30x + 25$		$+$	0	$+$	

Ensemble des solutions : $S = R \backslash \{\frac{5}{3}\}$.

De nouveau observez la figure 2.5 et constatez graphiquement que les valeurs de x pour lesquelles les ordonnées de la fonction sont strictement positives sont bien celles indiquées par l'ensemble des solutions.

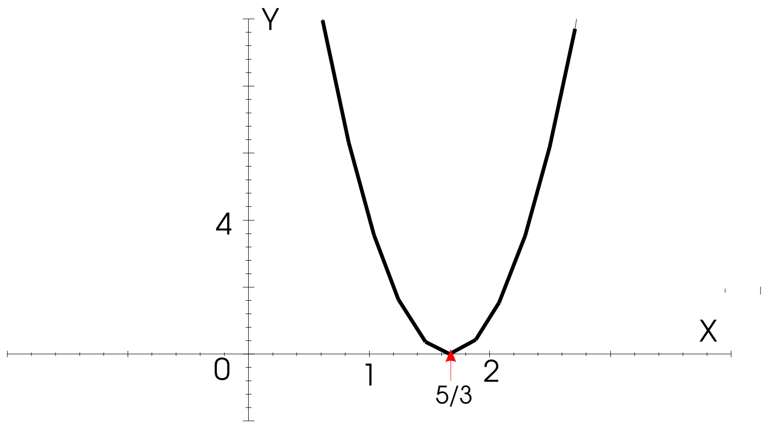

FIG. 2.5 – Signe de la fonction $y = ax^2 + bx + c$ si $\Delta = 0$: sauf en $x = \frac{-b}{2a}$, le signe de y est toujours celui de a.

$c)$ $x^2 + x + 1 > 0$
– Recherche des zéros
$\Delta < 0$ donc il n'y a pas de zéros !
– Tableau des signes :

x	$-\infty$				$+\infty$
x^2+x+1		$+$	$+$	$+$	

L'ensembles des solutions est donc : $S = R$.
De nouveau vous pouvez retrouvez cet ensemble en observant la figure 2.6.

2.2.5 Inéquations réductibles au premier ou au second degré

Toute inéquation de la forme

$$A(x).B(x) \lesseqgtr 0$$

ou de la forme

$$\frac{A(x)}{B(x)} \lesseqgtr 0$$

où les expressions algébriques $A(x)\,et\,B(x)$ sont des polynômes peuvent être résolues grâce à un tableau des signes.

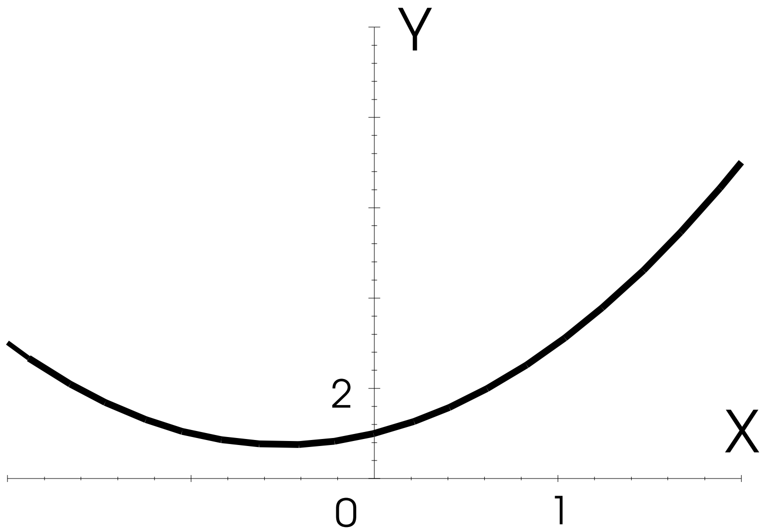

FIG. 2.6 – Signe de la fonction $y = ax^2 + bx + c$ si $\Delta < 0$: le signe de y est toujours celui de a.

Méthode :

1. Factorisation de $A(x)$ et de $B(x)$ si le degré dépasse 2
2. Recherche des zéros et des conditions
3. Etude des signes par tableau

Exemples :
Voici un exemple de chaque type.
Résoudre
$a)\, x^3 + x \geq 2$
$x^3 + x - 2 \geq 0$
– On factorise le premier membre et on trouve
$x^3 + x - 2 = (x - 1)\,(x^2 + x + 2)$
L'inéquation s'écrit donc $(x - 1)\,(x^2 + x + 2) \geq 0$
– Recherche des zéros (racines)
$x - 1 = 0$ donc $x = 1$
$x^2 + x + 2 = 0$ $\Delta < 0$ pas de racine.
– Tableau des signes :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$	0	$+$	
$x^2 + x + 2$		$+$	$+$	$+$	
$(x - 1)(x^2 + x + 1)$		$-$	0	$+$	

Donc $S = [1, +\infty[$

b) $\frac{x^3-x}{(x-2)^2} \geq 0$
$\frac{x(x^2-1)}{(x-2)^2} \geq 0$
– Condition : $x \neq 2$
– Recherche des zéros
$x(x^2-1) = 0$
On trouve $x = 0 \qquad x = 1 \qquad x = -1$
– Recherche des zéros du dénominateur (pôles) :
$(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
– Tableau des signes

x	$-\infty$	-1		0		1		2	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2-1	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$\frac{x(x^2-1)}{(x-2)^2}$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$C.E.$	$+$

L'ensemble des solutions est : $S = [-1, 0] \cup [1, 2[\cup]2, +\infty[$

2.2.6 Exercices

Résoudre les inéquations suivantes :
1) $-3x + 2 \leq 5x - 3$
2) $\frac{2x}{-3} < \frac{-4}{5}$
3) $\frac{2}{-3x} < -\frac{4}{5}$
4) $x(2x+3) \geq 5$
5) $(x-2)^2(1-3x)(x^2-9) \geq 0$
6) $\frac{6x(2x+1)^3}{(-2x^2+5x-2)(x^2+x+1)} < 0$
7) $\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2-1} > 2$
8) $\frac{12x-32}{x} < x < \frac{11x-10}{x}$
Solutions
1) $-3x + 2 \leq 5x - 3$
$S = [\frac{5}{8}, +\infty[$
2) $\frac{2x}{-3} < \frac{-4}{5}$
Remaquons que, en multipliant les deux membres par -1, on a
$\frac{2x}{3} > \frac{4}{5}$
$\frac{10x}{15} > \frac{12}{15}$
On multiplie les deux membres par 15 et on obtient
$10x > 12$
$x > \frac{6}{5}$
$S =]\frac{6}{5}, +\infty[$
3) $\frac{2}{-3x} < -\frac{4}{5}$

On multiple les deux membres par 5, on a
$\frac{10}{-3x} < -4$
$\frac{10}{-3x} + 4 < 0$
$\frac{10-12x}{-3x} < 0$
Tableau des signes

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
$10-12x$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$-3x$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\frac{10-12x}{-3x}$		$+$	$C.E$	$-$	0	$+$	

$S =]0, \frac{5}{6}[$
4) $x(2x+3) \geq 5$
$S =]-\infty, \frac{-5}{2}] \cup [1, +\infty[$
5) $(x-2)^2(1-3x)(x^2-9) \geq 0$
Attention : le signe de $(x-2)^2$ est toujours positif si $x \neq 2$ car l'exposant est **pair.**
$S =]-\infty, -3] \cup [\frac{1}{3}, 3]$
6) $\frac{6x(2x+1)^3}{(-2x^2+5x-2)(x^2+x+1)} < 0$
Attention : l'étude du signe de $(2x+1)^3$ se fait comme l'étude du signe de $(2x+1)$ car l'exposant est **impair.**
$S =]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]0, \frac{1}{2}[\cup]2, +\infty[$
7) $\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2-1} > 2$
$S =]-1, \frac{1-\sqrt{3}}{2}[\cup]1, \frac{1+\sqrt{3}}{2}[$
8) $\frac{12x-32}{x} < x < \frac{11x-10}{x}$
Pour cet exercice il faut considérer deux inéquations qui doivent être vérifiées ensemble.
$\frac{12x-32}{x} < x \qquad et \qquad x < \frac{11x-10}{x}$
La première inéquation donne un ensemble de solutions qui est :
$S_1 =]0, 4[\cup]8, +\infty[$
la seconde inéquation donne un ensemble de solutions qui est :
$S_2 =]-\infty, 0[\cup]1, 10[$
Il faut ensuite chercher les solutions communes à S_1 et S_2.
Pour cela vous disposez sur un axe les ensembles S_1 et S_2.
La partie commune de ces deux ensembles est l'intersection, donc la solution que l'on cherche.
On trouve :
$S = S_1 \cap S_2 =]1, 4[\cup]8, 10[.$